

ФАНО России
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича
Сибирского отделения Российской академии наук (ИТПМ СО РАН)

Болтаев Артем Иванович

НАУЧНЫЙ ДОКЛАД

об основных результатах подготовленной научно—квалификационной работы
(диссертации)

*«Исследование особенностей деформирования и разрушения конструкций из
разносопротивляющихся материалов»*

Направление подготовки:

01.06.01 — Математика и механика

Специальность подготовки: 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Научный руководитель

д-р физ.-мат. наук, профессор

Немировский Юрий Владимирович

Новосибирск 2018

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования

Многие современные конструкционные материалы обладают особыми свойствами, связанными с различным поведением в условиях растяжения и сжатия (дерево, бетоны, чугуны, модифицированные алюминиевые и ферросплавы, титановые сплавы, пластики и композитные материалы). Кроме того они все в той или иной степени обладают свойствами физической нелинейности и пластичности.

До недавнего времени одной из основных проблем при уточнение моделей деформирования материалов являлась сложность получаемых уравнений. Повсеместное внедрение персональных компьютеров и значительные успехи в разработке численных методов решения уравнений (методы Галеркинскогo типа и особенно входящий в них метод конечных элементов) позволило во многих случаях обойти поставленные ограничения и дали большие возможности для уточнения математических моделей деформирования конструкций. В свою очередь это привело к резкому увеличению работ, учитывающих физическую нелинейность реальных материалов. Совершенствование моделей деформирования материалов постепенно входит и в практику нормативного проектирования конструкций.

Всё выше сказанное говорит о важности и принципиальной возможности изучения деформирования и разрушения конструкций из материалов по разному сопротивляющихся растяжению и сжатию.

Цель и задачи исследования

Целью исследования является изучение особенностей деформирования и разрушения конструкций из разносопротивляющихся материалов на примере слоисто-неоднородных стержней и стержневых систем. Для этого предполагается решить следующие задачи:

1. Построить математическую модель деформирования слоисто-неоднородного стержня (стержневой системы) в условиях сложного изгиба

с растяжением – сжатием. Материал слоёв стержня должен обладать физической нелинейности и разной сопротивляемостью растяжению и сжатию.

2. Получить систему разрешающих уравнений задачи деформирования слоисто-неоднородного стержня (стержневой системы) и исследовать возможные способы ее решения.
3. Решить большое количество модельных задач определения напряженно-деформированного состояния слоисто-неоднородных стержней при различных начальных данных (геометрии конструкции и слоёв, нагрузках, условиях закрепления, материалов слоёв).
4. На основе полученных данных выявить особенности деформирования и разрушения конструкций из разносопротивляющихся материалов.

На защиту выносятся:

1. Результаты описания диаграмм деформирования различных материалов (древесина, бетон, сталь) с помощью единой аппроксимирующей функции в виде степенного многочлена 2-ой или 3-ей степени.
2. Разработанную методику построения диаграмм деформирования при одноосном растяжении-сжатии бетона и древесины с помощью основных механических характеристик материала $\sigma_*^\pm, \varepsilon_*^\pm, E^\pm$.
3. Разработанную систему разрешающих уравнений задачи деформирования слоисто-неоднородного стержня (стержневой системы) находящейся в условиях сложного изгиба (поперечного изгиба) с растяжением-сжатием.
4. Разработанные численные методы решения данной системы разрешающих уравнений.
5. Результаты решения модельных задач деформирования слоисто-неоднородных стержневых конструкций из разносопротивляющегося материала.

Научная новизна

1. Показана возможность описания диаграмм деформирования различных материалов (древесина, бетон, сталь) с помощью единой аппроксимирующей функции в виде степенного многочлена 2-ой или 3-ей степени.
2. Получена методика построения диаграмм деформирования при одноосном растяжении-сжатии бетона и древесины с помощью основных механических характеристик материала $\sigma_*^\pm, \varepsilon_*^\pm, E^\pm$.
3. Получена система разрешающих уравнений задачи деформирования слоисто-неоднородного стержня (стержневой системы) находящейся в условиях сложного изгиба (поперечного изгиба) с растяжением-сжатием. При этом учитывается физическая нелинейность и разная сопротивляемость растяжению и сжатию.
4. Получены различные численные методы решения данной системы разрешающих уравнений.
5. Решено и проанализировано большое количество задач деформирования слоисто-неоднородных стержневых конструкций из разносопротивляющегося материала.

Практическая значимость работы

Разработанная методика расчёта слоисто-неоднородных стержней и стержневых систем позволяет учесть в расчёте конструкции как физическую нелинейность материала, так и его разную сопротивляемость растяжению и сжатию. Это в свою очередь позволяет повысить надежность и экономичность проектирования широко применяемых в строительстве конструкций стержневого типа. Позволяет рассчитывать слоистые конструкции, составленные из различных материалов (дерево, бетон, металлы, пластики и т.д.).

Достоверность

Достоверность полученных зависимостей между напряжениями и деформациями для основных строительных материалов (бетоны, древесина,

металлы) основывается на обобщение большого объема экспериментальных работ по одноосному растяжению-сжатию данных материалов. Создание математической модели деформирования слоисто-неоднородного стержня основано на использовании проверенных гипотез и уравнений механики деформируемого твердого тела. Полученные системы разрешающих уравнений в предельном случае редуцируются до общеизвестных уравнений технической теории изгиба стержней. В работе используются широко известные и апробированные численные методы решения систем нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений.

Доклады и публикации

Содержание исследований докладывались и обсуждались на:

1. 51-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», Новосибирск, НГУ, 2013.
2. VIII всероссийской научно-технической конференции "Актуальные вопросы строительства", Новосибирск, НГАСУ, 2015.
3. IX всероссийской научно-технической конференции "Актуальные вопросы строительства", Новосибирск, НГАСУ, 2015.
4. Международной научно-практической конференции "Архитектурно-строительный и дорожно-транспортный комплексы: проблемы, перспективы, новации", Омск, СибАДИ, 2016.
5. 4-ой всероссийской конференции "Проблемы оптимального проектирования сооружений", Новосибирск, НГАСУ, 2017.
6. X Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела, Самара, СамГТУ, 2017.
7. Международная научно-техническая конференция "Моделирование и инжиниринг механических и мехатронных систем", Минск, БНТУ, 2018.
8. XI всероссийской научно-технической конференции "Актуальные вопросы архитектуры и строительства", Новосибирск, НГАСУ, 2018.

Исследования проводились в рамках гранта РФФИ: 14-01-00102 Гибридное и оптимальное проектирование композитных конструкций.

Результаты исследований опубликованы в 20 научных работах, в том числе в 10 научных работах из Перечня периодических изданий рекомендованных ВАКом России для публикации материалов кандидатской диссертации.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Аппроксимация диаграмм деформирования разносопротивляющихся материалов

Для построения математической модели напряжённо-деформированного состояния стержня, необходимо получить аналитическую связь между напряжениями σ и деформациями ε .

Опытное получение зависимости $\sigma - \varepsilon$ происходит при проведении испытаний на центральное растяжение-сжатие стандартных образцов материалов. Полученная на основе опытных данных аппроксимация должна удовлетворять следующим требованиям:

1. достаточно точно совпадать с экспериментальной кривой деформирования в пределах установленной области аппроксимации;
2. иметь простой математический вид, для упрощения математической модели;
3. должен быть учтён разброс данных испытаний различных образцов;
4. должно быть учтено влияние продолжительности действия нагрузки;
5. необходимо учесть влияние других факторов - влажности материала, температуры и т.д.;
6. дополнительным требованием можно считать возможность одинаково хорошо аппроксимировать диаграммы деформирования различных материалов.

Нужно отметить, что пункты 1 и 2 являются в определённой степени взаимоисключающими. Так как более точное описание диаграммы

деформирования ведёт к усложнению аппроксимирующей функции. Учёт пунктов 3-5 необходим для применения математической модели в расчёте реальных строительных конструкций. Аппроксимация различных диаграмм деформирования одной функцией позволит упростить математические выкладки.

Различными исследователями в разное время было предложено большое количество видов аппроксимирующих функций для диаграмм деформирования. При этом каждый исследователь выбирал функцию из тех или иных положений. Не останавливаясь на анализе всех возможных вариантов, примем в рассмотрение два вида функций:

1. квадратная аппроксимация отдельно для растяжения и сжатия

$$\begin{aligned}\sigma^-(\varepsilon) &= \sum_{i=1}^2 E_i^- \varepsilon^i = E_1^- \varepsilon + E_2^- \varepsilon^2, & \varepsilon_*^- \leq \varepsilon \leq 0; \\ \sigma^+(\varepsilon) &= \sum_{i=1}^2 E_i^+ \varepsilon^i = E_1^+ \varepsilon + E_2^+ \varepsilon^2, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*^+.\end{aligned}\tag{1}$$

2. кубическая аппроксимация на всём диапазоне деформирования

$$\sigma(\varepsilon) = \sum_{j=1}^3 E_j \varepsilon^j = E_1 \varepsilon + E_2 \varepsilon^2 + E_3 \varepsilon^3, \quad \varepsilon_*^- \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*^+.\tag{2}$$

Здесь $\varepsilon_*^+, \varepsilon_*^-$ - предельные значения продольных деформаций при растяжении и сжатии; E_i^\pm, E_j - коэффициенты аппроксимации диаграмм деформирования соответственно для квадратной и кубической функций.

Принятие в качестве аппроксимирующих функции степенных многочленов, как будет показано далее, с одной стороны позволяет достаточно точно аппроксимировать экспериментальные данные, с другой стороны данные функции имеют простой вид и являются одними из наиболее изученных в математике.

Связь между напряжениями и деформациями в форме (1-2) позволяет получать в пределе модели одномодульного и разномодульного линейно-упругого материала. Если в (1) принять $E_2^\pm = 0$, то приходим к модели разномодульного

линейно-упругого материала. Далее, принимая $E_1^+ = E_1^- = E$, получим уравнение закона Гука. То же получим и в (2) при $E_2 = E_3 = 0$.

Функции (1-2) позволяют моделировать поведение материала по разному сопротивляющегося растяжению и сжатию, так как в общем случае являются несимметричными функциями относительно линии $\varepsilon = 0$.

Аппроксимация диаграмм деформирования методом наименьших квадратов. Для подтверждения возможности аппроксимации диаграмм деформирования функциями (1,2) используем экспериментальные данные по трём распространённым в строительстве породам древесины: сосны, ясеня и ели. И, на основе метода наименьших квадратов вычислим коэффициенты аппроксимации E_i^\pm, E_j .

Оценку степени точности аппроксимации проводим с помощью коэффициента детерминации.

Результаты аппроксимации даны на рис.1-3, значения коэффициентов аппроксимации, а также коэффициентов детерминации приведены в табл.1-2. На рис.1-3 экспериментальные данные обозначены следующими значками: треугольниками для сосны, крестиками для ясеня и кружками для ели. Соответствующие им аппроксимирующие функции проведены сплошными линиями. В табл.1 коэффициенты детерминации отдельно приведены для диаграмм растяжения - R^{2+} и отдельно для диаграмм сжатия - R^{2-} .

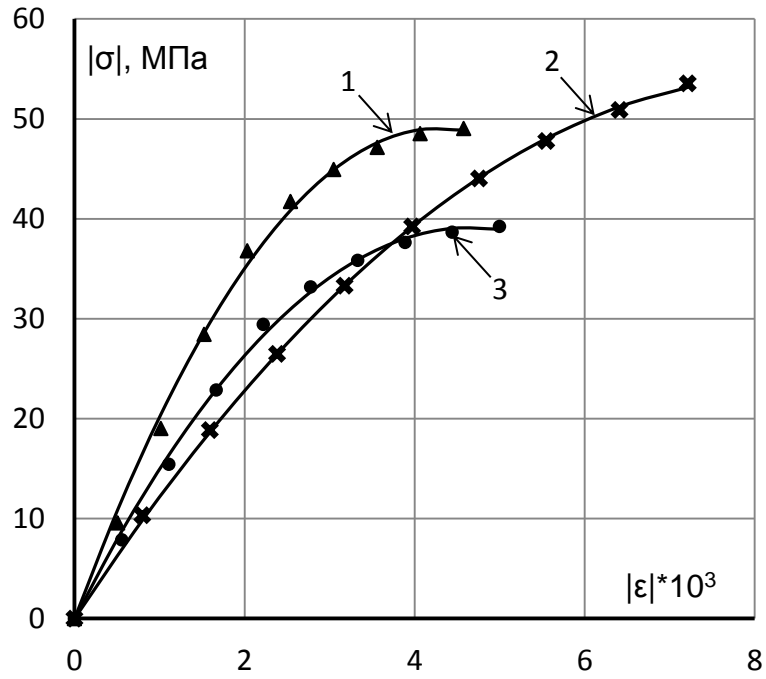


Рис.1 Квадратная аппроксимация диаграмм сжатия древесины (МНК). 1 - сосна, 2 - ясень, 3 - ель

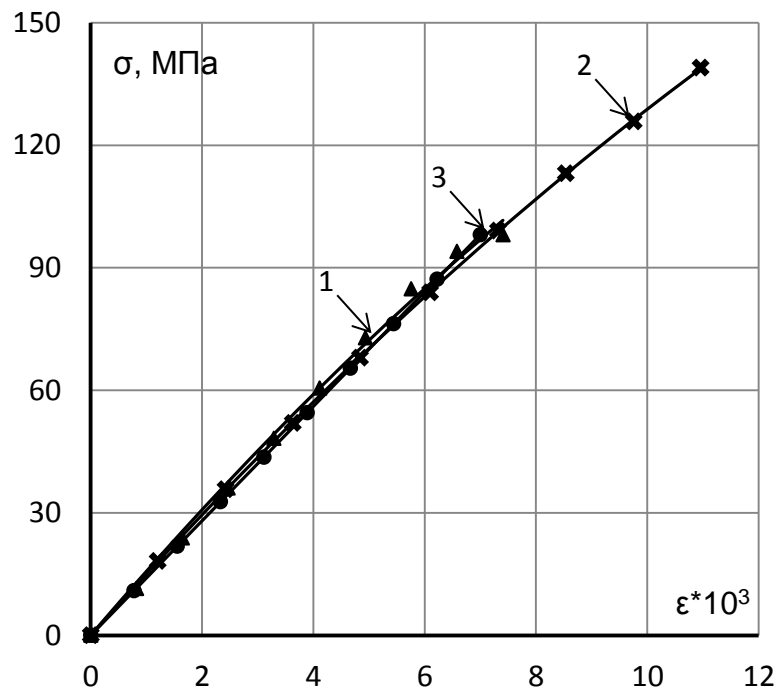


Рис.2 Квадратная аппроксимация диаграмм растяжения древесины (МНК). 1 - сосна, 2 - ясень, 3 - ель

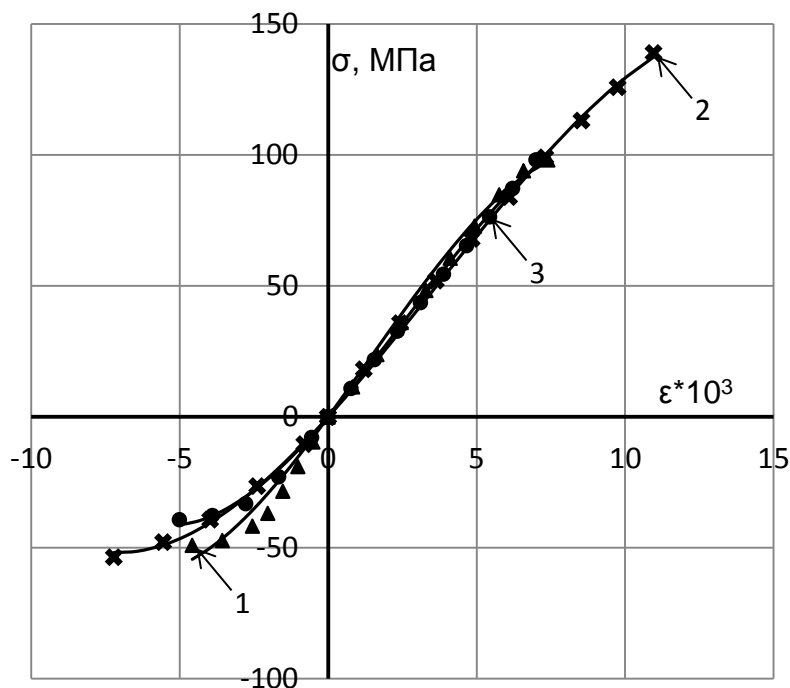


Рис.3 Кубическая аппроксимация диаграмм деформирования древесины (МНК). 1 - сосна, 2 - ягель, 3 - ель

Анализ экспериментальных диаграмм деформирования показывает, что при растяжении древесина деформируется линейно практически до самого разрушения, а при сжатии уже в области средних напряжений начинает проявляться физическая нелинейность, которая возрастает по мере увеличения нагрузки. Для одной и той же породы древесины пределы прочности на растяжение и сжатие различаются до 2,6 раз, максимальные деформации - до 1,6 раз.

Табл.1 Характеристики диаграмм деформирования древесины для квадратной аппроксимации (МНК)

№	Характеристики Порода	E_1^+	E_1^-	E_2^+	E_2^-	ϵ_*^+	ϵ_*^-	σ_*^+	σ_*^-	R^{2+}	R^{2-}
		10^3 МПа	10^3 МПа	10^6 МПа	10^6 МПа	10^{-3}	10^{-3}	МПа	МПа		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Сосна	15,97	22,82	-0,303	2,65	7,4	-4,6	101.6	-48.9	0.996 7	0.9975

2	Ясень	15,21	12,94	-0,233	0,773	11,0	-7,2	138.7	-53.2	0.999 9	0.9998
3	Ель	14,01	16,74	0,000	1,789	7,0	-5,0	98,1	-39,0	0.999 9	0.9980

Табл.2 Характеристики диаграмм деформирования древесины для кубической аппроксимации (МНК)

№	Характеристики	E_1	E_2	E_3	ε_*^+	ε_*^-	σ_*^+	σ_*^-	R^2
	Порода	10^3 МПа	10^6 МПа	10^9 МПа	10^{-3}	10^{-3}	МПа	МПа	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Сосна	15,55	0.373	-0,094	7,4	-4,6	97.6	-54.4	0.9951
2	Ясень	12.60	0.451	-0,042	11,0	-7,2	137.4	-51.8	0.9995
3	Ель	13.24	0.610	-0.078	7,0	-5,0	95.9	-41.2	0.9988

Из рис.1-3 видно, что функции (1) и (2) достаточно хорошо аппроксимируют экспериментальные диаграммы деформирования древесины. При этом квадратная аппроксимация немного точнее кубической. Коэффициент детерминации для квадратной аппроксимации изменяется от 0,9975 до 0,9999, для кубической - от 0,9951 до 0,9995, см. табл. 1-2.

Аналогичным образом проводилась аппроксимация диаграмм деформирования тяжелого бетона марок М150, М200 и М250, а также арматуры А400 (35ГС), А500С и А800(23ХГ2Т).

Аппроксимация диаграмм деформирования с помощью основных механических характеристик При определении коэффициентов диаграмм деформирования E_i^\pm, E_j использовались экспериментальные графики. Однако число таких графиков сильно ограничено. В основном в литературе приводятся данные по $E_{и}$ (модуль упругости при изгибе) и σ_*^\pm , реже можно найти модули

упругости при растяжении E^+ и сжатии E^- . Значения предельных деформаций ε_*^\pm практически отсутствуют.

Были проанализированы различные варианты определения коэффициентов E_i^\pm, E_j через $\sigma_*^\pm, \varepsilon_*^\pm, E^\pm$ - табл.3-4. В табл.3-4 коэффициенты детерминации приведены для трёх пород древесины. Первой строке соответствует сосна, второй - ясень, и третьей - ель. Значения E^\pm взяты из табл.1 - $E^\pm = E_1^\pm$.

Табл.3 Методы определения коэффициенты для квадратной аппроксимации

№	Определяющие уравнения	Коэффициенты диаграмм деформирования	R^{2+}	R^{2-}
1	2	3	4	5
1	$\left. \frac{d\sigma^\pm}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=0} = E^\pm,$ $\left. \frac{d\sigma^\pm}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=\varepsilon_*^\pm} = 0.$	$E_1^\pm = E^\pm,$ $E_2^\pm = -\frac{E^\pm}{2\varepsilon_*^\pm}.$	0.6085	0.9880
			0.6355	0.9671
			0.4263	0.9869
2	$\left. \frac{d\sigma^\pm}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=0} = E^\pm,$ $\sigma(\varepsilon_*^\pm) = \sigma_*^\pm.$	$E_1^\pm = E^\pm,$ $E_2^\pm = \frac{\sigma_*^\pm - E^\pm \varepsilon_*^\pm}{\varepsilon_*^{\pm 2}}.$	0.9941	0.9974
			0.9999	0.9997
			1.0000	0.9979
3	$\left. \frac{d\sigma^\pm}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=\varepsilon_*^\pm} = 0,$ $\sigma(\varepsilon_*^\pm) = \sigma_*^\pm.$	$E_1^\pm = 2\frac{\sigma_*^\pm}{\varepsilon_*^\pm},$ $E_2^\pm = -\frac{\sigma_*^\pm}{\varepsilon_*^{\pm 2}}.$	0.8487	0.9934
			0.8119	0.9787
			0.7055	0.9940
4	$\left. \frac{d\sigma^\pm}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=0} = E^\pm,$ $\left. \frac{d\sigma^\pm}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=\varepsilon_*^\pm} = 0,$ $\sigma(\varepsilon_*^\pm) = \sigma_*^\pm.$	$E_1^\pm = E^\pm,$ $E_2^\pm = -\frac{E^\pm}{4\sigma_*^\pm},$ $\varepsilon_*^\pm = 2\frac{\sigma_*^\pm}{E^\pm}.$	0.9190	0.9975
			0.9423	0.9996
			0.8566	0.9980

Табл.4 Методы определения коэффициенты для кубической аппроксимации

№	Определяющие уравнения	Коэффициенты диаграмм деформирования	R^2
1	2	3	4
1	$\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=0} = \min(E^+; E^-),$	$E_1 = \min(E^+; E^-),$ $E_2 = E_3 = E_4 = \frac{\sigma_*^+}{\varepsilon_*^{+3}}$	0.9934

			0.9991
			0.9970
2	$\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\Big _{\varepsilon=0} = \min(E^+; E^-),$ $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\Big _{\varepsilon=\varepsilon_*^\pm} = 0.$	$E_1 = \min(E^+; E^-),$ $E_2 = -E_1 \frac{\varepsilon_*^- + \varepsilon_*^+}{2\varepsilon_*^+ \varepsilon_*^-},$ $E_3 = \frac{E_1}{3\varepsilon_*^- \varepsilon_*^+}.$	0.9897 0.9749 0.9713
3	$\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\Big _{\varepsilon=0} = \min(E^+; E^-),$ $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\Big _{\varepsilon=\varepsilon_*^\pm} = 0,$ $\sigma(\varepsilon_*^\pm) = \sigma_*^\pm.$	$E_1 = \min(E^+; E^-),$ $E_2 = \frac{3\sigma_*^+ - 2E_1\varepsilon_*^+}{\varepsilon_*^{+2}},$ $E_3 = \frac{E_1\varepsilon_*^+ - 2\sigma_*^+}{\varepsilon_*^{+3}}.$ ε_*^\pm находим из решения системы: $\sigma_*^- 3(k^2 - a) = 2E_1\varepsilon_*^- k(k - 1)$ $E_1\varepsilon_*^- k(k^2 - 1) = 2\sigma_*^-(k^3 - a)$ Где $k = \frac{\varepsilon_*^+}{\varepsilon_*^-}$ $a = \frac{\sigma_*^+}{\sigma_*^-}.$	0.9932 0.9863 0.9978
4	$\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\Big _{\varepsilon=\varepsilon_*^-} = 0,$ $\sigma(\varepsilon_*^\pm) = \sigma_*^\pm.$	$E_1 = \frac{1}{(\varepsilon_*^+ - \varepsilon_*^-)^2} \left[\sigma_*^- \frac{\varepsilon_*^+}{\varepsilon_*^-} (2\varepsilon_*^+ - 3\varepsilon_*^-) + \sigma_*^+ \frac{(\varepsilon_*^-)^2}{\varepsilon_*^+} \right],$ $E_2 = \frac{1}{(\varepsilon_*^+ - \varepsilon_*^-)^2} \left[\sigma_*^- \left(3 - \left(\frac{\varepsilon_*^+}{\varepsilon_*^-} \right)^2 \right) - \sigma_*^+ \frac{2\varepsilon_*^-}{\varepsilon_*^+} \right],$ $E_3 = \frac{1}{(\varepsilon_*^+ - \varepsilon_*^-)^2} \left[\sigma_*^- \frac{\varepsilon_*^+ - 2\varepsilon_*^-}{(\varepsilon_*^-)^2} + \sigma_*^+ \frac{1}{\varepsilon_*^+} \right].$	0.9869 0.9993 0.9981

Будем считать аппроксимацию хорошо совпадающей с экспериментальными данными при $R^2(R^{2\pm}) \geq 0.990$. Исходя из этого, для квадратной аппроксимации наилучшим является вариант в строке 2 табл.3. Для кубической аппроксимации наилучший вариант расположен в строке 1 табл.4.

Данные рисунки свидетельствуют об успешной возможности аппроксимации диаграмм деформирования с использованием основных механических характеристик древесины - $\sigma_*^\pm, \varepsilon_*^\pm$ и E^\pm .

Оба выбранных варианта аппроксимации требуют знания предельных продольных деформаций ε_*^\pm . Однако, их сложно найти в литературе. Поэтому можно предложить следующий способ определения ε_*^\pm : ε_*^+ находим с

использованием закона Гука, так как при растяжении диаграмма деформирования практически линейна вплоть до разрушения; ε_*^- определяем из формул строки 4 табл.3, так как данный в ней метод определения E_i^- даёт хорошие совпадения с опытом. В итоге, при отсутствии опытных данных о ε_*^\pm , можно приближённо принять:

$$\varepsilon_*^+ = \frac{\sigma_*^+}{E^+}, \quad \varepsilon_*^- = 2 \frac{\sigma_*^-}{E^-}. \quad (3)$$

Вычислим ε_*^\pm по формулам (3) и сравним с предельными деформациями, взятыми из диаграмм деформирования сосны, ясеня и ели. Максимальная разница для сосны составляет 17,0 %, для ясеня - 16,6 % и для ели - 6,2 %.

Используя формулы (3) и данные о σ_*^\pm , E^\pm , вычислим коэффициенты аппроксимации для различных пород древесины - табл.5. Коэффициенты E_i^\pm определяем по формулам строки 2 табл.3, а E_j - по формулам строки 1 табл.4.

Табл.5 Характеристики диаграмм деформирования древесины

№	Характеристики Порода	E_1^+	E_1^-	E_2^+	E_2^-	E_1	E_2	E_3	ε_*^+	ε_*^-	σ_*^+	σ_*^-
		10^3 МПа	10^3 МПа	10^6 МПа	10^6 МПа	10^3 МПа	10^6 МПа	10^9 МПа	10^{-3}	10^{-3}	МПа	МПа
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	Берёза даурская	18,4	16,1	0	1,325	16,1	0,922	-0,066	10,65	-6,07	196	-48,9
2	Граб кавказский	14,8	12,4	0	0,523	12,4	0,387	-0,011	8,18	-11,85	121	-73,5
3	Дуб красный	14,2	14,2	0	0,818	14,2	0,395	-0,049	8,10	-8,68	115	-61,6
4	Ива ломкая	11,1	11,5	0	0,808	11,1	0,408	-0,048	8,42	-7,11	93,5	-40,9
5	Лиственница сибирская	14,7	14,2	0	0,804	14,2	0,418	-0,044	8,16	-8,83	120	-62,7
6	Ольха черная	12,1	13,0	0	0,969	12,1	0,467	-0,055	8,51	-6,71	103	-43,6
7	Осина	15,6	12,8	0	0,916	12,8	0,652	-0,038	8,53	-6,98	133	-44,7
8	Пихта кавказская	12,7	12,7	0	0,894	12,7	0,497	-0,056	8,90	-7,10	113	-45,1
9	Тополь сероющий	9,05	10,1	0	0,630	9,05	0,293	-0,026	11,38	-8,02	103	-40,5
10	Тополь черный	12,4	13,9	0	0,992	12,4	0,436	-0,049	8,95	-7,01	111	-48,7
11	Ясень	15,8	12,6	0	0,781	12,6	0,579	-0,025	9,24	-8,06	146	-50,8

	маньчжурский											
12	Ясень обыкновенный	14,2	15,2	0	1,144	14,2	0,593	-0,060	9,86	-6,64	140	-50,5

Анализируя данные табл.5 можно выявить следующие особенности диаграмм деформирования древесины:

1. модули упругости древесины при растяжении и сжатии отличаются максимум на 20,2 %, причём для половины пород эта разница лежит в пределах 7%.

2. Предельные деформации растяжения практически всегда больше предельных деформаций сжатия. Для берёзы даурской ε_*^+ больше ε_*^- в 1,75 раза, а для граба кавказского ε_*^- больше ε_*^+ в 1,45 раза.

3. Предел прочности на растяжение больше предела прочности на сжатие в среднем в 2,5 раза. Для берёзы даурской σ_*^+ больше σ_*^- в 4,0 раза, для граба кавказского σ_*^+ больше σ_*^- в 1,6 раза.

Из табл.5 видно, что модули упругости при растяжении и сжатии в основном не сильно отличаются друг от друга. В работе Коченова В.М. показано, что можно с небольшой погрешностью принять $E^+ = E^- = E_n$. Тогда, используя (3) можно получить коэффициенты диаграмм деформирования для сотен различных пород древесины по выше описанному алгоритму.

Аналогичным образом была проанализирована возможность аппроксимации диаграмм деформирования бетона с помощью основных механических характеристик.

Получение диаграмм деформирования для армированного слоя материала. В случае, когда армирующий материал равномерно распределён по объёму конструкции или по части объёма, удобно представить этот армированный слой как однородный материал. Определим коэффициенты диаграмм деформирования армированного слоя через коэффициенты диаграмм деформирования армирующего волокна и основного материала.

При определении коэффициентов полагаем, что армирующие волокна жёстко связаны с основным материалом. В качестве аппроксимирующей функции используем полиномы второй и третьей степени (1-2).

На рис.4 изображён армированный слой, равномерно растягиваемый силой F . Площадь поперечного сечения основного материала - A_0 , армирующего материала - A_1 .

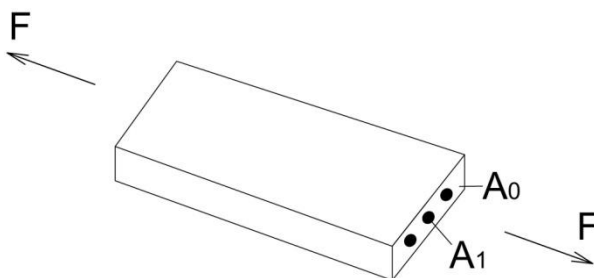


Рис.4 Схема армированного слоя

Нормальные напряжения в армированном слое σ определяем по формуле:

$$\sigma = \mu\sigma_0 + (1 - \mu)\sigma_1. \quad (4)$$

где σ_0, σ_1 - нормальное напряжение в основном материала и армирующих волокнах соответственно, $\mu = A_1/(A_0 + A_1)$ - коэффициент армирования.

Если армированный слой состоит из n_a различных армирующих материалов, формулы (1) преобразуются в:

$$\sigma^\pm = E_{1ap}^\pm \varepsilon + E_{2ap}^\pm \varepsilon^2, \quad \min|\varepsilon_{*0}^-, \varepsilon_{*1}^- \dots \varepsilon_{*n_a}^-| \leq \varepsilon \leq \max(\varepsilon_{*0}^+, \varepsilon_{*1}^+ \dots \varepsilon_{*n_a}^+),$$

$$E_{iap}^\pm = \sum_{j=1}^{n_a} \mu_j E_{ij}^\pm + \left(1 - \sum_{j=1}^{n_a} \mu_j\right) E_{i0}^\pm. \quad (5)$$

Напряжения в каждом материале находим по формуле:

$$\sigma_i^\pm = E_{1i}^\pm \varepsilon + E_{2i}^\pm \varepsilon^2. \quad (6)$$

Для кубического многочлена (1) зависимости (5-6) примут вид:

$$\sigma = E_{1ap} \varepsilon + E_{2ap} \varepsilon^2 + E_{3ap} \varepsilon^3,$$

$$\min|\varepsilon_{*0}^-, \varepsilon_{*1}^- \dots \varepsilon_{*n_a}^-| \leq \varepsilon \leq \max(\varepsilon_{*0}^+, \varepsilon_{*1}^+ \dots \varepsilon_{*n_a}^+), \quad (7)$$

$$E_{iар} = \sum_{j=1}^{n_a} \mu_j E_{ij} + \left(1 - \sum_{j=1}^{n_a} \mu_j\right) E_{ij},$$

$$\sigma_i = E_{1i} \varepsilon + E_{2i} \varepsilon^2 + E_{3i} \varepsilon^3.$$

Из формул (5) и (7) видно, что армированный слой можно рассматривать как слой, состоящий из одного материала. При этом коэффициенты аппроксимации могут быть легко вычислены через коэффициенты аппроксимации составляющих материалов. Прочность слоя определяется прочностью слабейшего материала.

Получение диаграмм деформирования при термосиловом воздействии (в области постоянства механических характеристик материалов). Наряду с механическими воздействиями строительные элементы могут подвергаться нагреву или охлаждению температурой T . При относительно низком уровне T все базовые характеристики материалов будут при изменении T сохранять постоянные значения ($E^\pm, \sigma_*^\pm, \varepsilon_*^\pm$ - константы), а зависимости между напряжениями и деформациями будут иметь вид:

1. квадратная аппроксимация отдельно для растяжения и сжатия:

$$\sigma^\pm = E_1^\pm (\varepsilon - \alpha T) + E_2^\pm (\varepsilon - \alpha T)^2, \quad \varepsilon_*^- + \alpha T \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*^+ + \alpha T. \quad (8)$$

2. кубическая аппроксимация на всём диапазоне деформирования:

$$\sigma = E_1 (\varepsilon - \alpha T) + E_2 (\varepsilon - \alpha T)^2 + E_3 (\varepsilon - \alpha T)^3, \quad \varepsilon_*^- + \alpha T \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*^+ + \alpha T. \quad (9)$$

Здесь α - коэффициент линейного расширения материала.

Далее получим связь между напряжениями и деформациями для армированного слоя в случае термосилового воздействия.

$$\sigma^\pm = E_{1apt}^\pm \varepsilon + E_{2apt}^\pm \varepsilon^2,$$

$$\min|\varepsilon_{*0}^-, \varepsilon_{*1}^- \dots \varepsilon_{*n_a}^-| \leq \varepsilon - \alpha T \leq \max(\varepsilon_{*0}^+, \varepsilon_{*1}^+ \dots \varepsilon_{*n_a}^+),$$

$$E_{iapt}^\pm = \sum_{j=1}^{n_a} \mu_j E_{itj}^\pm + \left(1 - \sum_{j=1}^{n_a} \mu_j\right) E_{it0}^\pm. \quad (10)$$

Напряжения в каждом материале находим по формуле:

$$\sigma_i^\pm = E_{1ti}^\pm \varepsilon + E_{2ti}^\pm \varepsilon^2. \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sigma &= E_{1apt} \varepsilon + E_{2apt} \varepsilon^2 + E_{3apt} \varepsilon^3, \\ \min|\varepsilon_{*0}^-, \varepsilon_{*1}^- \dots \varepsilon_{*n_a}^-| &\leq \varepsilon - \alpha T \leq \max(\varepsilon_{*0}^+, \varepsilon_{*1}^+ \dots \varepsilon_{*n_a}^+), \\ E_{iapt} &= \sum_{j=1}^{n_a} \mu_j E_{itj} + \left(1 - \sum_{j=1}^{n_a} \mu_j\right) E_{itj}, \\ \sigma_i &= E_{1ti} \varepsilon + E_{2ti} \varepsilon^2 + E_{3ti} \varepsilon^3. \end{aligned} \quad (12)$$

Вопросы требующие дополнительного изучения. Выше были рассмотрены различные варианты аппроксимации диаграмм деформирования материалов (дерево, бетон, сталь). При этом аппроксимировались средние опытные диаграммы, а следовательно не учитывались статистический разброс данных испытаний. Также отдельной проблемой стоит учёт длительности действия нагрузки, условий эксплуатации конструкций (влажность, температура и т.д.), наличие пороков в древесине и других факторов.

Получение коэффициентов аппроксимации диаграмм деформирования через величины $E^\pm, \varepsilon_*^\pm, \sigma_*^\pm$ позволяет посредством них учитывать влияние всех выше описанных факторов. Так как проведено большое количество исследований влияния этих факторов на $E^\pm, \varepsilon_*^\pm, \sigma_*^\pm$.

Математическая модель деформирования слоисто-неоднородного стержня

Схема бруса в декартовой прямоугольной системе координат хуз представляет собой стержень, состоящий из нескольких слоёв. Слои могут быть выполнены из различных материалов и могут располагаться как горизонтально, так и вертикально рис.5. Общее число слоёв принципиально не ограничено. Условия контакта слоёв считаются совершенными - отсутствуют взаимные смещения любого направления в плоскости контакта.

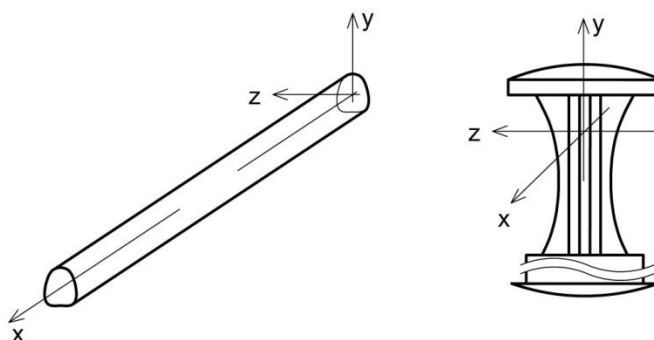


Рис.5 Общий вид и форма поперечного сечения слоистого стержня

Начало системы координат xuz помещаем в левый конец стержня. Ось x совпадает с продольной осью стержня и имеет определённую геометрическую привязку к поперечному сечению.

Для упрощения получающихся в дальнейшем решений, будем считать, что структуры гибридных стержней и распределений внешних нагрузок согласованы так, что они в процессе нагружения либо вовсе не вызывают эффектов закручивания, либо они столь незначительны, что ими можно пренебречь. В общем случае стержень испытывает изгиб в плоскостях xu и uz с растяжением-сжатием. Все нагрузки приведены к продольной оси стержня - оси x .

Деформации и перемещения будем считать малыми. Это позволит записывать уравнения равновесия для недеформированного состояния:

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = q_y - \frac{dm_z}{dx}, \quad \frac{d^2 M_y}{dx^2} = q_z - \frac{dm_y}{dx}, \quad \frac{dN}{dx} = -q_x. \quad (13)$$

Здесь N - проекция вектора внутреннего усилия на ось x , M_z, M_y - проекции вектора внутреннего момента на оси z и y . Точка приложения вектора внутренних усилий лежит на оси стержня. Величины q_x, q_y, q_z - проекции вектора распределённой нагрузки, приложенной к оси стержня, m_z, m_y - проекции вектора распределённого момента на оси z и y .

Интегрируя уравнения (13), получим выражения для внутренних усилий:

$$\begin{aligned}
 N(x) &= N(0) - \int_0^x q_x dx, \\
 M_z(x) &= M_z(0) - Q_y(0)x - \int_0^x m_z dx + \int_0^x \left(\int_0^x q_y dx \right) dx, \\
 M_y(x) &= M_y(0) - Q_z(0)x - \int_0^x m_y dx + \int_0^x \left(\int_0^x q_z dx \right) dx.
 \end{aligned} \tag{14}$$

В случае если стержень статически определимый, то значения внутренних усилий в начале координат определяем из условий равновесия узлов. Иначе, необходимо составлять дополнительные условия совместности деформаций.

Принимается справедливой теория плоских сечений Бернулли и упрощённое выражение кривизны плоской кривой. В соответствие с данными ограничениями связь между деформациями и перемещениями стержня выражается следующими известными соотношениями:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(x, y, z) &= \varepsilon_0 - y \cdot \kappa_z - z \cdot \kappa_y, \\
 \varepsilon_0(x) &= \frac{du_0}{dx}, \quad \kappa_y = \frac{d^2 v_0}{dx^2}, \quad \kappa_z = \frac{d^2 w_0}{dx^2}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь $\varepsilon_0, \kappa_z, \kappa_y$ - продольная деформация на уровне оси стержня и изменение кривизны оси стержня в проекции на оси z и y , $u_0(x), v_0(x), w_0(x)$ - компоненты перемещений точек на выбранной осевой линии. Интегрируя соотношения (15) получим:

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= u_0(0) + \int_0^x \varepsilon_0 dx, \\
v_0(x) &= v_0(0) + \varphi_y(0) \cdot x + \int_0^x \left(\int_0^x \kappa_y dx \right) dx, \\
\varphi_y(x) &= \varphi_y(0) + \int_0^x \kappa_y dx,
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
w_0(x) &= w_0(0) + \varphi_z(0) \cdot x + \int_0^x \left(\int_0^x \kappa_z dx \right) dx, \\
\varphi_z(x) &= \varphi_z(0) + \int_0^x \kappa_z dx.
\end{aligned}$$

Величины $u_0(0), v_0(0), w_0(0), \varphi_y(0)$ и $\varphi_z(0)$ находим из условий закрепления стержня.

Связь между нормальными напряжениями и деформациями m -го слоя выражается степенным многочленом вида (2):

$$\sigma_m = \sum_{n=1}^3 E_{nm} \varepsilon_m^n, \quad -\varepsilon_{m*}^- \leq \varepsilon_m \leq \varepsilon_{m*}^+ \tag{17}$$

Где E_{nm} - константы, зависящие от механических свойств m -го слоя стержня, ε_{m*}^\pm - предельно допустимые продольные деформации m -го слоя при растяжении (+) и сжатии (-).

Система разрешающих уравнений. Вариант 1. Выразим интегральные внутренние силовые факторы N, M_y и M_z через продольные напряжения σ_m :

$$N = \sum_{m=1}^{n_{\text{сл}}} \int_{F_m} \sigma_m dF_m, \quad M_y = \sum_{m=1}^{n_{\text{сл}}} \int_{F_m} \sigma_m \cdot z dF_m, \quad M_z = \sum_{m=1}^{n_{\text{сл}}} \int_{F_m} \sigma_m \cdot y dF_m. \tag{18}$$

В (18) интегрирование ведётся по площади поперечного сечения m -го слоя стержня. Количество слоёв задаётся параметром $n_{\text{сл}}$.

Подставляем в (18) связь между напряжениями и деформациями в виде (17) и первое уравнение из (15). После преобразований получим систему из трёх

нелинейных алгебраических уравнений 3-ей степени относительно трёх неизвестных - κ_y , κ_z и ε_0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k+1} \sum_{t=1}^k C_{k-1}^{t-1} \kappa_z^{k-t} \kappa_y^{t-1} D_{nkt} - N = F_1(\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z) = 0, \\ \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k+1} \sum_{t=1}^k C_{k-1}^{t-1} \kappa_z^{k-t} \kappa_y^{t-1} D_{nk(t+1)} + M_y = F_2(\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z) = 0, \\ \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k+1} \sum_{t=1}^k C_{k-1}^{t-1} \kappa_z^{k-t} \kappa_y^{t-1} D_{n(k+1)t} + M_z = F_3(\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z) = 0. \end{array} \right. \quad (19)$$

$$D_{nkt} = \sum_{m=1}^{n_{cl}} E_{nm} d_{mkt}, \quad d_{mkt} = \int_{F_m} y^{k-t} z^{t-1} dF_m, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (20)$$

Система (19) обладает следующими характерными особенностями:

1. Структура каждого уравнения системы подобна, и отличается только коэффициентами D_{nkt} .

2. Геометрия поперечного сечения полностью описывается коэффициентами d_{mkt} , характеристики диаграммы деформирования - коэффициентами E_{nm} . Коэффициенты D_{nkt} полностью включают в себя геометрические и механические характеристики слоёв.

3. Приняв $E_{nm} = 0$ ($n = 2, 3$), получим определяющие уравнения для слоистого, линейно-упругого стержня. Если при этом $n_{cl} = 1$, то приходим к уравнениям технической теории изгиба стержней.

Условие прочности задаётся соотношением

$$|\varepsilon_{m,max}^{\pm}| \leq \varepsilon_{m*}^{\pm} \quad (m = 1 \dots n_{cl}), \quad (21)$$

где $\varepsilon_{m,max}^{\pm}$ - максимальные продольные деформации растяжения (+) и сжатия (-) m -го слоя. Проверка выполнения условия прочности осуществляется в каждом слое поперечного сечения. Так как функция продольных деформаций $\varepsilon(x, y, z)$ в пределах определённого поперечного сечения линейная (гипотеза плоских сечений), то экстремальные значения она будет принимать на контуре поперечного сечения слоя. Задача определения области возможных значений

κ_y , κ_z и ε_0 представляет собой отдельный интерес. В случае прямого поперечного изгиба она сводится к решению задачи линейного программирования.

Система разрешающих уравнений. Вариант 2. Подставляем выражения внутренних усилий (18) в дифференциальные уравнения равновесия (13):

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{t=1}^k D'_{nkt} \frac{d}{dx} (\varepsilon_0^{n-k+1} \kappa_y^{t-1} \kappa_z^{k-t}) + q_x = 0, \\ \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{t=1}^k D'_{nk(t+1)} \frac{d^2}{dx^2} (\varepsilon_0^{n-k+1} \kappa_y^{t-1} \kappa_z^{k-t}) - \frac{dm_y}{dx} + q_z = 0, \\ \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{t=1}^k D'_{n(k+1)t} \frac{d^2}{dx^2} (\varepsilon_0^{n-k+1} \kappa_y^{t-1} \kappa_z^{k-t}) - \frac{dm_z}{dx} + q_y = 0. \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} D'_{nkt} &= (-1)^{k-1} C_n^{k-1} C_{k-1}^{t-1} D_{nkt}, & D'_{nk(t+1)} &= (-1)^{k-1} C_n^{k-1} C_{k-1}^{t-1} D_{nk(t+1)}, \\ D'_{n(k+1)t} &= (-1)^{k-1} C_n^{k-1} C_{k-1}^{t-1} D_{n(k+1)t}. \end{aligned} \quad (23)$$

Далее переходим от обобщённых деформаций ε_0 , κ_y и κ_z к компонентам вектора перемещений точек оси стержня u_0 , v_0 и w_0 . Для этого подставляем (15) в (22):

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{t=1}^k D'_{nkt} \frac{d}{dx} \left(\left(\frac{du_0}{dx} \right)^{n-k+1} \cdot \left(\frac{d^2 v_0}{dx^2} \right)^{t-1} \cdot \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^{k-t} \right) + q_x = 0, \\ \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{t=1}^k D'_{nk(t+1)} \frac{d^2}{dx^2} \left(\left(\frac{du_0}{dx} \right)^{n-k+1} \cdot \left(\frac{d^2 v_0}{dx^2} \right)^{t-1} \cdot \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^{k-t} \right) - \frac{dm_y}{dx} + q_z = 0, \\ \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{t=1}^k D'_{n(k+1)t} \frac{d^2}{dx^2} \left(\left(\frac{du_0}{dx} \right)^{n-k+1} \cdot \left(\frac{d^2 v_0}{dx^2} \right)^{t-1} \cdot \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^{k-t} \right) - \frac{dm_z}{dx} + q_y = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Выражения (24), как и (22) являются системой из трёх нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Вместе с граничными условиями они представляют собой краевую задачу, решение которой полностью определяет напряжённо-деформированное состояние стержня.

Решение системы разрешающих уравнений (19). Система нелинейных уравнений (19) такова, что можно легко получить аналитическое выражение производных входящих в неё функций по основным неизвестным - κ_y, κ_z и ε_0 . Поэтому для её решения будем использовать метод Ньютона. Полагаем, что задача статически определима и, следовательно, внутренние усилия определены из (13).

Для произвольного поперечного сечения запишем систему уравнений (19) в виде:

$$\bar{F}(\bar{x}) = 0. \quad (25)$$

Тогда решение строится посредством рекуррентной формулы:

$$\bar{x}^{j+1} = \bar{x}^j - J^{-1}(\bar{x}^j) \cdot \bar{F}(\bar{x}^j). \quad (26)$$

где $J(\bar{x})$ - матрица Якоби системы (25), \bar{x}^j - вектор неизвестных на j -ом шаге. Каждый её член представляет собой нелинейный алгебраический многочлен.

Начальное приближение \bar{x}^1 можно взять в виде нулевого вектора, что будет соответствовать недеформированному состоянию стержня. С другой стороны его можно определить из решения системы (19) при $E_{nm} = 0$ ($n = 2,3$), что равносильно переходу к физически линейной задаче. В этом случае система (19) переходит в систему трёх линейных уравнений:

$$\begin{cases} \varepsilon_0 D_{111} - \kappa_y D_{122} - \kappa_z D_{121} - N = 0, \\ \varepsilon_0 D_{112} - \kappa_y D_{123} - \kappa_z D_{122} + M_y = 0, \\ \varepsilon_0 D_{121} - \kappa_y D_{132} - \kappa_z D_{131} + M_z = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Выпишем решение системы (27):

$$\bar{x}^1 = A^{-1} \cdot \bar{B} \quad (28)$$

$$\bar{x}^1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} D_{111} & -D_{122} & -D_{121} \\ D_{112} & -D_{123} & -D_{122} \\ D_{121} & -D_{132} & -D_{131} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} N \\ -M_y \\ -M_z \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Примем следующие критерии останова для итерационного процесса (26):

$$\begin{aligned} \|\bar{F}(\bar{x}^j) - \bar{F}(\bar{x}^{j+1})\| &\leq \tau_F (1 + \|\bar{F}(\bar{x}^{j+1})\|), \\ \|\bar{x}^j - \bar{x}^{j+1}\| &\leq \sqrt{\tau_F} (1 + \|\bar{x}^{j+1}\|). \end{aligned} \quad (30)$$

Оба неравенства являются признаками близости последовательностей $\bar{F}(\bar{x}^j)$ и \bar{x}^j к своим пределам. Параметр τ_F имеет смысл желаемой точности решения - чем он меньше, тем выше точность. Его величина задаётся непосредственно в расчёте и может изменяться в зависимости от полученных результатов. В неравенствах (30) используется евклидова норма.

Область возможных значений вектора неизвестных \bar{x} ограничена условием прочности (21).

Кроме сложного изгиба стержня были получены разрешающие уравнения для случая поперечного изгиба с растяжением-сжатием, а также одноосного растяжения-сжатия стержня. Была решена задача определения напряженно-деформированного состояния многопролетной слоисто-неоднородной балки с учетом физической нелинейности и разносопротивляемости как материала балки, так и материала опор.

Анализ особенностей деформирования конструкций из разносопротивляющихся материалов

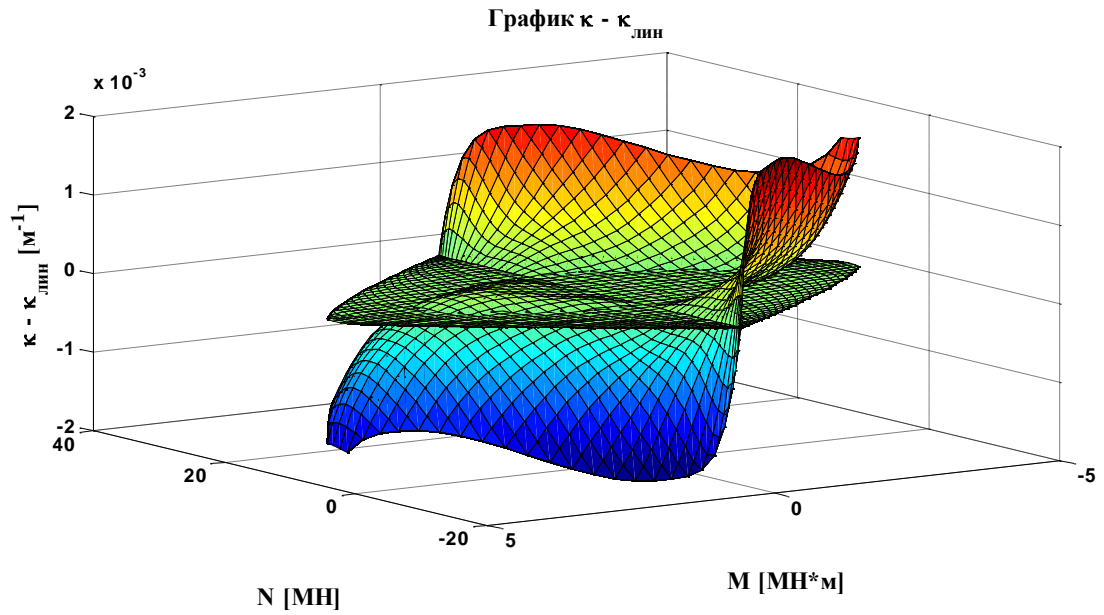
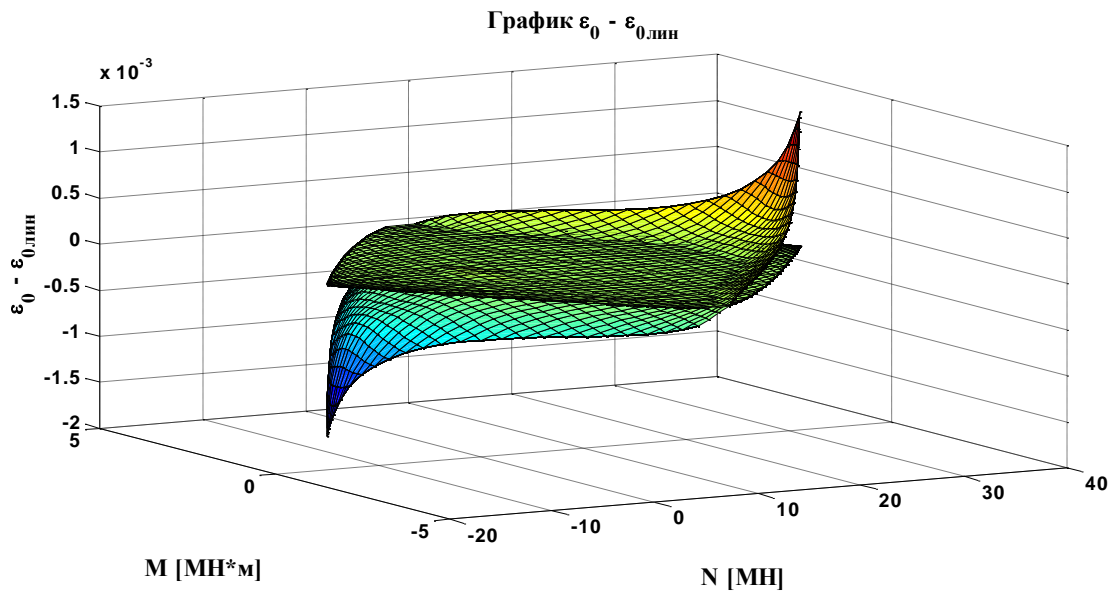
В ходе исследования было решено большое количество задач по определению напряженно-деформированного состояния слоисто-неоднородных стержней и стержневых систем. Расчетные схемы конструкций включали в себя различные виды одно и многопролетных балок, рамные конструкции и конструкции ферменного типа. Рассматривались как статически определимые, так и статически неопределимые расчетные схемы. Стержни находились под воздействием различных видов силовых нагрузок и имели различные виды закреплений. Материал слоёв стержней был представлен различными породами древесной, различными классами бетона и арматуры. Значительному варьированию подвергалась форма поперечных сечений и слоёв стержней.

Расчет железобетонных конструкций проводился до момента образования трещин в бетоне.

В результате анализа данных расчетов были выделены следующие особенности деформирования слоисто-неоднородных стержневых конструкций, материал

которых по разному сопротивляется растяжению и сжатию и обладает физической нелинейностью:

1. В зависимости от распределения материалов слоёв разрушение может начинаться как на внешней поверхности стержня, так и во внутренних слоях. Иначе говоря, в слоистых конструкциях могут возникать скрытые механизмы разрушения.
2. Предельные деформации могут достигаться как в сжатых, так и в растянутых волокнах. При этом резко меняется характер разрушения. Так для деревянных стержней достижение предельных деформаций в области сжатия обычно приводит к образованию складок, при этом конструкция сохраняет несущую способность; достижение предельных деформаций в области растяжения приводит к резкому разрушению конструкции.
3. Перераспределение материалов слоёв значительно влияет на несущую способность и деформативность стержня. Так для частного расчета слоистой деревянной балки величина предельной нагрузки изменялась от 89 до 173 кН, максимального прогиба от 6,5 до 11,8 см и максимального угла поворота поперечного сечения от $4,4 \cdot 10^{-2}$ до $8,1 \cdot 10^{-2}$ рад. Простая перестановка пород во внешних слоях привела к снижению несущей способности в 1,54 раза.
4. На рис.6-7 представлены графики $(\kappa - \kappa_{\text{лин}})$ и $(\varepsilon_0 - \varepsilon_{0\text{лин}})$, где $\kappa_{\text{лин}}, \varepsilon_{0\text{лин}}$ - кривизна и продольная деформация, полученные из линейного расчёта. Линейный расчёт получается при занулении части коэффициентов аппроксимации диаграммы деформирования материала ($E_2 = E_3 = 0$), и строятся на области возможных значений усилий M, N взятой из нелинейного расчёта.

Рис.6 График функции $(\kappa - \kappa_{\text{лин}})$ Рис.7 График функции $(\varepsilon_0 - \varepsilon_{0\text{лин}})$

На рис.6-7 дополнительно к искомым графикам построены плоскости $\kappa = 0$ и $\varepsilon_0 = 0$. Благодаря данным плоскостям заметна область в которой разница между линейным и нелинейным расчётами невелика. Данная область расположена в зоне малых и средних значений внутренних усилий. Выход за неё приводит к резкому нарастанию разницы между двумя видами расчётов.

Так, для нашего примера $\frac{|\kappa - \kappa_{лин}|_{max}}{|\kappa|_{max}} 100 = 15,83\%$, $\frac{|\varepsilon_0 - \varepsilon_{0лин}|_{max}}{|\varepsilon_0|_{max}} 100 = 21,62\%$.

Из рис.6-7 можно сделать общее заключение о деформирование физически нелинейных стержневых систем: в области больших значений внутренних усилий физически нелинейная балка имеет большие значения деформаций по сравнению с линейным расчётом, можно сказать что она более податлива.

5. Нелинейный характер разрешающей системы уравнений приводит к тому, что каждая обобщенная деформация (κ_y, κ_z и ε_0) является функцией всех обобщенных силовых факторов (N, M_y и M_z). В технической теории изгиба стержней ε_0 зависит только от N , κ_y (κ_z) только от M_y (M_z).

Проектирование равнопрочных слоисто-неоднородных стержней

Пусть имеется стержень с заданной силовой нагрузкой и определёнными условиями закрепления. Требуется, путём изменения размеров поперечного сечения стержня вдоль оси, добиться его равнопрочности. Стержень будем считать равнопрочным, если в каждом поперечном сечении как минимум в двух точках выполняется условие (21) со знаком равенства:

$$|\varepsilon(y_{j*})| = \varepsilon_{i*}^{\pm} \quad (j = 1, 2). \quad (31)$$

Здесь y_{j*} - y координата точки, в которой достигнуто предельное значение деформаций.

Многослойный стержень, выполненный из различных материалов, может иметь большое количество вариантов предельных распределений $\varepsilon(y)$, обеспечивающих условие равнопрочности. На рис.8. для трёхслойного сечения показаны предельные деформации $\pm \varepsilon_{i*}^{\pm}$ и линии, отражающие распределение деформаций $\varepsilon(y)$.

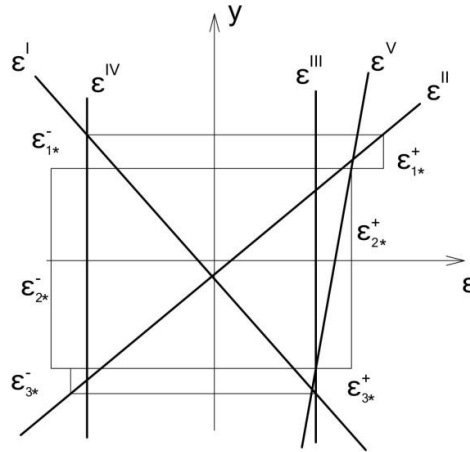


Рис.8 Возможные предельные распределения $\varepsilon(y)$

Каждое предельное распределение деформаций соответствует определённым значениям внутренних усилий, так линии ε^I и ε^{II} отличаются знаками изгибающего момента M_z , а ε^{III} и ε^{IV} - знаками продольной силы. Для выбора действительного деформированного состояния необходимо использовать предварительную информацию о распределении деформации $\varepsilon(y)$ в сечении.

В данном случае для упрощения расчётов будем рассматривать только четыре предельных распределения $\varepsilon(y)$: I - $\varepsilon(y_{max}) = -\varepsilon_{1*}^-$, $\varepsilon(y_{min}) = \varepsilon_{n_{cl}*}^+$; II - $\varepsilon(y_{max}) = \varepsilon_{1*}^+$, $\varepsilon(y_{min}) = -\varepsilon_{n_{cl}*}^-$; III - $\varepsilon(y_{1*}) = \varepsilon(y_{2*}) = \min(\varepsilon_{i*}^+)$; IV - $\varepsilon(y_{1*}) = \varepsilon(y_{2*}) = \max(-\varepsilon_{i*}^-)$. Здесь $y_{max(min)}$ - y координата верхних (нижних) фибровых волокон.

Для каждого из предельных состояний можно найти обобщенные деформации, используя 1-ое уравнение из (3.25):

$$\varepsilon_0(x) = \frac{\mp \varepsilon_{1*}^{\mp} y_{max} \mp \varepsilon_{n_{cl}*}^{\pm} y_{min}}{y_{max} - y_{min}}, \quad \kappa(x) = \frac{\mp \varepsilon_{1*}^{\mp} \mp \varepsilon_{n_{cl}*}^{\pm}}{y_{max} - y_{min}}. \quad (32)$$

В (32) верхние знаки берутся для I, а нижние знаки для II предельного состояния. При осуществлении III и IV предельного состояния $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_{i*}^+)$, $\kappa = 0$ и $\varepsilon_0 = \max(-\varepsilon_{i*}^-)$, $\kappa = 0$, соответственно.

Для I и II предельных распределений ε необходимо делать проверку условия прочности во внутренних точках сечения.

Если стержень статически определимый, то подставляя ε_0 и k в (19) будем иметь два уравнения, из которых можно найти два, предварительно выбранных для варьирования, размера $b_i(h_i)$. В случае статически неопределимого стержня к системе (19) добавляются уравнения совместности деформаций.

Определяемые размеры должны удовлетворять ограничениям, отражающим требования по обеспечению местной устойчивости, конструктивные, технологические, эксплуатационные и иные требования. В простейшем случае они представляют собой ограничения вида:

$$b_i \geq b_{i \min} \geq 0, \quad h_i \geq h_{i \min} \geq 0. \quad (33)$$

Будем рассматривать параметрическое и функциональное проектирование стержней. В случае параметрического проектирования стержень имеет постоянное поперечное сечение, а условие равнопрочности (31) выполняется в одном опасном сечении. Искомыми являются два выбранных размера опасного сечения $b_i(h_i)$.

При функциональном проектировании условие равнопрочности (31) выполняется по всей длине стержня, а определению подлежат уже функции двух выбранных размеров $b_i(x)(h_i(x))$.

Параметрическое проектирование было использовано для определения размеров трёх и двухслойных стержней, выполненных из различных пород древесины. Результаты проектирования показали следующие:

1. Наблюдается большое различие в полученных размерах слоёв в зависимости от выбора комбинации материалов. Это является следствием значительных различий в механических характеристиках пород древесины, а также их разнсопротивляемости при растяжении и сжатии.
2. Наилучшими балками, как с точки зрения стоимости, так точки зрения веса и прогиба являются балки, слои которых выполнены из различных пород древесины. Что говорит в пользу конструирования комбинированных конструкций.

3. В отдельных случаях предельные деформации достигались раньше на внутренних границах слоёв.

Функциональное проектирование имеет те же особенности, что и параметрическое. Однако при функциональном проектировании удается получить значительно большее изменение стоимостных и деформационных параметров конструкции. Так в сравнении с эталонными стержнями (состоящими из одной породы и имеющими постоянное поперечное сечение) удалось снизить вес в 3,83 раза, а стоимость в 3,87 раза. При этом происходило возрастание максимального прогиба в 1,4-1,8 раза.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Показана возможность описания диаграмм деформирования различных материалов (древесина, бетон, сталь) с помощью единой аппроксимирующей функции в виде степенного многочлена 2-ой или 3-ей степени.
2. Получена методика построения диаграмм деформирования при одноосном растяжении-сжатии бетона и древесины с помощью основных механических характеристик материала $\sigma_*^\pm, \varepsilon_*^\pm, E^\pm$.
3. Получена система разрешающих уравнений задачи деформирования слоисто-неоднородного стержня (стержневой системы) находящейся в условиях сложного изгиба (поперечного изгиба) с растяжением-сжатием. При этом учитывается физическая нелинейность и разная сопротивляемость растяжению и сжатию.
4. Получены различные численные методы решения данной системы разрешающих уравнений.
5. Решено и проанализировано большое количество задач деформирования слоисто-неоднородных стержневых конструкций из разносопротивляющегося материала.

Решение модельных задач показало экономическую эффективность использования слоисто-неоднородных конструкций. Это в свою очередь является

стимулом для дальнейшего разработки данной проблемы. Нерешенными остаются такие вопросы как: учет влияния температуры и влажности на диаграммы деформирования, ползучести материала, получение разрешающих уравнений деформирования стержней с учетом кручения, совершенствования численных методов расчета и другие.

Основное содержание научно-квалификационной работы отражено в следующих публикациях:

1. Немировский Ю.В. Метод расчёта деревянных стропильных покрытий зданий. Сообщение 1: Моделирование и общие закономерности [Текст] / Ю.В. Немировский, А.И. Болтаев // Изв. вузов. Строительство. – 2014. - №3. – С. 5-13.
2. Немировский Ю.В. Метод расчёта деревянных стропильных покрытий зданий. Сообщение 2: Численный метод решения и примеры расчёта [Текст] / Ю.В. Немировский, А.И. Болтаев // Изв. вузов. Строительство. – 2014. - №9-10. – С. 13-21.
3. Немировский Ю.В. Диаграммы деформирования бетонов и железобетонов [Текст] / Ю.В. Немировский, А.И. Болтаев// Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. – 2015. - №6. – С. 125-129.
4. Немировский Ю.В. Некоторые особенности деформирования нелинейного разносопротивляющегося материала однопролётных балок [Текст] / Ю.В. Немировский, А.И. Болтаев // Вестник ТГАСУ. - 2016. - №4. - С. 95-106.
5. Немировский Ю.В. Напряженно-деформированное состояние железобетонных трапецевидных и эллиптических балок [Текст] / Ю.В. Немировский, А.И. Болтаев // Wschodnioeuropejskie Czasopismo Naukowe (East European Scientific Journal). - 2016. - №6. - С. 151-161.
6. Немировский Ю.В. Особенности деформирования и разрушения деревянных клееных многопролётных балок. Сообщение 1 [Текст] / Ю.В. Немировский, А.И. Болтаев // Изв. вузов. Строительство. – 2016. - №6. – С. 116-126.

- URL: [http://izvuzstr.sibstrin.ru/uploads/vorotnikov/№6-\(2016\)+.pdf](http://izvuzstr.sibstrin.ru/uploads/vorotnikov/№6-(2016)+.pdf) (дата обращения: 8.09.2017)
7. Немировский Ю.В. Особенности деформирования и разрушения деревянных клееных многопролётных балок. Сообщение 2 [Текст] / Ю.В. Немировский, А.И. Болтаев // Изв. вузов. Строительство. – 2016. - №7. – С. 83-91.
U R L : [http://izvuzstr.sibstrin.ru/uploads/vorotnikov/№07-\(2016\).pdf](http://izvuzstr.sibstrin.ru/uploads/vorotnikov/№07-(2016).pdf) (дата обращения: 8.09.2017)
8. Немировский Ю.В. Особенности расчёта деревожелезобетонного балочного моста [Текст] / Ю.В. Немировский, А.И. Болтаев // Вестник СибАДИ. – 2016. - №5. – С. 114-124.
U R L : <https://npo.conf.nstu.ru/file/tom1.pdf> (дата обращения: 8.09.2017)
9. Немировский Ю.В., Болтаев А.И. Влияние формы и расположения слоёв на напряженно-деформированное состояния гибридных деревянных балок // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. – 2017. - №10. – С. 73-83.
10. Немировский Ю.В., Болтаев А.И. Расчет и проектирование гибридных деревянных брусьев // Вестник ПНИПУ. Механика. - 2017. - №3. - С. 129-152.
11. Немировский Ю.В., Болтаев А.И. Особенности деформирования и разрушения гибридных брусьев из древесины // Известия вузов. Лесной журнал. – 2018. - №4. - В печати.
12. Немировский Ю.В., Болтаев А.И. Сложный изгиб и начальное разрушение гибридных деревянных брусьев // Вестн. Сам. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2017. - №4. – С. 699-716.
13. Болтаев А.И. Анализ особенностей формирования и изменения физико-механических свойств дерева в процессе роста при разных климатических условиях // Материалы 51-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Физика сплошных сред (12–18 апреля 2013 г.). – Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2013. – С. 39. (Новосибирск)

- 14.Немировский Ю.В. Гибридное проектирование деревянных покрытий зданий [Текст] / Ю.В. Немировский, А.И. Болтаев // Материалы VIII всероссийской научно-технической конференции "Актуальные вопросы строительства". – 2015.– С.36-41. (Новосибирск 7-9 апреля)
- 15.Немировский Ю.В. Особенности деформирования и разрушения деревянных клееных многопролётных балок при изгибе [Текст] / Ю.В. Немировский, А.И. Болтаев // Материалы IX всероссийской научно-технической конференции "Актуальные вопросы строительства". – 2016. (Новосибирск 5-7 апреля)
- 16.Немировский Ю.В. Гибридное проектирование деревобетонных конструкций [Текст] / Ю.В. Немировский, А.И. Болтаев // Материалы международной научно-практической конференции "Архитектурно-строительный и дорожно-транспортный комплексы: проблемы, перспективы, новации". - 2016. - С. 45-52. (7-9 декабря). (Омск)
- 17.Немировский Ю.В. Рациональное проектирование слоистых деревянных конструкций [Текст] / Ю.В. Немировский, А.И. Болтаев // Доклады 4-ой всероссийской конференции "Проблемы оптимального проектирования сооружений". – 2017. (Новосибирск 11-13 апреля)
- 18.Немировский Ю.В., Болтаев А.И. Проблемы сложного изгиба и начального разрушения гибридных деревянных брусьев // X Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела. - 2017. (Самара 18-22 сентября).
- 19.Немировский Ю.В., Болтаев А.И. Сложный изгиб гибридных деревянных брусьев // Международная научно-техническая конференция "Моделирование и инжиниринг механических и мехатронных систем". - 2018. (Минск 5-7 февраля).
- 20.Немировский Ю.В, Болтаев А.И. Сложный изгиб гибридных деревянных брусьев // Материалы XI всероссийской научно-технической конференции "Актуальные вопросы архитектуры и строительства". – 2018. (Новосибирск 3-5 апреля).